

矩形波导中沿 E 面均匀多介质柱散射特性分析

周 平

(淮阴师范学院 物理系,江苏 淮安 223001)

摘 要: 本文应用有限元-边界元耦合法数值分析了矩形波导中沿 E 面均匀的多个任意截面形状介质柱的散射特性,对介质柱所在区域和除去介质柱后的空气区域分别用有限元和多连域问题的边界元法进行了分析. 为了验证本文方法的正确性,编制了一个通用的计算机程序,对一个算例进行了计算,结果与文献值一致.

关键词: 有限元法;边界元法;矩形波导;介质柱;散射系数

中图分类号: O451 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-6876(2002)02-0026-06

1 引言

在矩形波导中放入沿 E 面均匀的导体和介质障碍物是研制微波和毫米波器件的一种重要途径. 例如要准确设计波导型介质柱带通滤波器,必须清楚这些障碍物的散射特性. 事实上,这个问题一直是微波电路设计者们理论和实验研究的重要课题之一. 文献[1~9]分别用一阶近似变分法,高阶近似变分法,点匹配法,格林函数法,模匹配法,有限元法以及有限元-边界元耦合法等对矩形波导中加载小直径、大直径的圆形介质柱,方形、矩形介质柱,任意截面形状的介质柱进行了研究,给出了许多对工程设计有重要价值的实例,但以上文献只研究了单个介质柱情形. 而在实际应用中,经常遇到多介质柱的问题. 文献[10]用模匹配法对矩形波导中加载多介质柱问题进行了研究,但它只分析了对称加载情形,这显然有很大的局限性. 文献[11]从极化电流分布的积分方程入手,获得了令人满意的计算结果,但分析和计算较复杂. 文献[12]用边界元结合模式展开以及分析方法对矩形波导中加载多个介质柱进行了研究,但对于不同材料、不同形状的介质柱,分析方法不一样,缺乏通用性.

有限元-边界元耦合法是在有限元和边界元法基础上发展起来的一种新的数值计算方法,它已被广泛地应用于电磁场数值计算中^[8,9,13,14],并被证明是分析波导不连续性的有效手段,它既有有限元法对场域剖分灵活性的特点,又克服了边界元法难以解决不均匀区域的问题,同时还保留了边界元法所需内存小,计算时间短等优点. 本文在文献[8,9]的基础上,将有限元-边界元耦合法扩展到分析矩形波导中加入多个沿 E 面均匀的任意截面形状介质柱的散射特性问题. 对每个介质柱所在区域,用有限元分析,对除去介质柱后的空波导区域用多连域的边界元法分析. 为了验证本文理论研究的正确性,编制了一个通用的计算机程序,对一个典型算例进行了计算,其结果与已有文献值一致.

2 理论分析

图1表示一个矩形波导结,它含有 n 个波导端口,其中放置 n 个沿 y 方向均匀不变的任意形状截面的介质柱.

假设波导结是不对称的,第 i 个波导端口的宽度为 a_i ,边界 $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 与 Γ 所围区域包含有

收稿日期: 2001-11-20

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(99KJD140005)

作者简介: 周平(1965-),男,江苏淮安人,副教授,硕士,现在南京航空航天大学攻读博士学位. 主要从事电磁场与微波技术等研究.

介质柱, 介质柱的相对介电常数为 ε_j , 它们与空波导的边界面分别为 $\Gamma_{sj} (j = 1, 2, \dots, n)$, 边界 $\Gamma, \Gamma_i, \Gamma_{sj}$ 所围的区域为 Ω , 即除去介质柱后的空波导结, 波导中只能传输 TE_{10} 模, 其它的高次模截止.

设电磁场随时间作简谐变化, 变化因子为 $\exp(j\omega t)$, 考虑由主模 TE_{10} 激励的场, 由于波导中填充的是沿 y 方向均匀的介质柱, 故只能激励起 TE_m 模式, 其它的高次模不存在, 对于 TE_m 模, $E_x = E_z = H_y = 0$

由麦克斯韦方程式可得:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad (1)$$

其中

$$k^2 = \begin{cases} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 & \text{无介质柱处} \\ \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_j & \text{介质柱处} \end{cases}$$

令 $\phi = E_y$, 则(1)式变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \quad (2)$$

2.1 多连域的边界元法

图 2 表示一个多连通区域. 在区域 Ω 内外边界上任意取六个点 A, B, C, D, E, F , 并用连线分别将 AB, CD, EF 连接起来, 由复变函数理论可知, 原来的多连域将变为单连域.

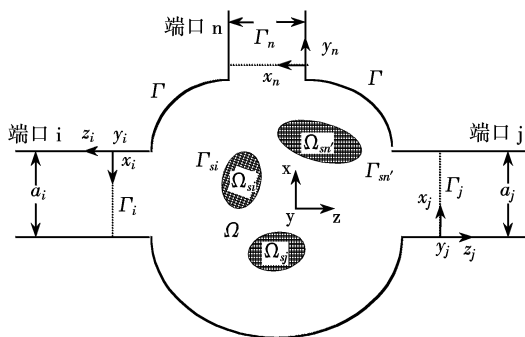


图 1 含有多介质柱的 n 个端口波导结

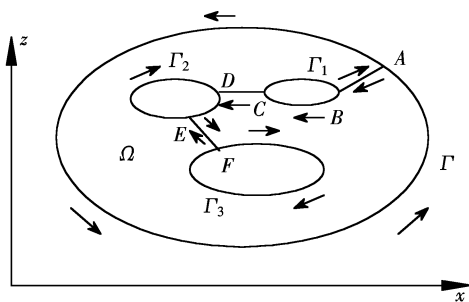


图 2 多连通区域示意图

利用基本解 ϕ^* 和格林函数^[15], 由(2)式可得

$$\begin{aligned} \phi_i + \int_{\Gamma_q} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{q'}} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{q''}} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{q'''}} \phi_q^* d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_{q^{(4)}}} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{q^{(5)}}} \phi_q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{q^{(6)}}} \phi_q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi^* q d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_3} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q'}} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q''}} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q'''}} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q^{(4)}}} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q^{(5)}}} \phi^* q d\Gamma + \int_{\Gamma_{q^{(6)}}} \phi^* q d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\phi^* = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kr) \quad (4)$$

$$q^* = \frac{j}{4} k H_1^{(2)}(kr) \cos \alpha \quad (5)$$

这里, ϕ 为节点 i 处的 ϕ 值, q 与 q^* 分别为 ϕ 与 ϕ^* 的外法向导数, $H_0^{(2)}$ 和 $H_1^{(2)}$ 分别为 0 阶和 1 阶第二类 Hankel 函数, α 为矢量 r 与法向单位矢量 n 的夹角.

由于

$$\int_{\Gamma} f d\Gamma = - \int_{\Gamma} f d\Gamma \quad (6)$$

$$\oint_{\Gamma} d\Gamma = - \oint_{\Gamma} d\Gamma \quad (7)$$

$$\oint_{\Gamma} d\Gamma = - \oint_{\Gamma} d\Gamma \quad (8)$$

将(6)、(7)、(8)代入(3)式得

$$\begin{aligned} \phi + \int \phi_q^* d\Gamma + \int_1 \phi_q^* d\Gamma + \int_2 \phi_q^* d\Gamma + \int_3 \phi_q^* d\Gamma = \\ \int \phi^* q d\Gamma + \int_1 \phi^* q d\Gamma + \int_2 \phi^* q d\Gamma + \int_3 \phi^* q d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

对边界 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 进行剖分,并假设单元上的函数值和函数的法向导数值分别为 $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ 和 Q_1, Q_2, Q_3 ,则(9)式离散后可写成下列矩阵

$$\begin{bmatrix} H & H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

在积分时要注意到外边界的积分回路为逆时针方向,内边界的积分回路为顺时针方向.

2.2 边界元公式

如果用 $\Phi_{dj}^{(1)}$ 和 $Q_{dj}^{(1)}$ 分别表示第 j 个介质柱与空气交界处属于空气区域 Ω 的节点的 ϕ 和 q 值矩阵;
 $\Phi_{dj}^{(2)}$ 和 $Q_{dj}^{(2)}$ 分别为交界处属于第 j 个介质柱边界上节点的 ϕ 和 q 值矩阵,下标 d 表示与交界处有关的量.

对于空气区域 Ω ,根据多连域的边界元法,应用(10)可以写出下面的边界元方程:

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_n & H_{d1}^{(1)} & H_{d2}^{(1)} & \cdots & H_{dn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdots \\ \Phi_n \\ \Phi_{d1}^{(1)} \\ \Phi_{d2}^{(1)} \\ \cdots \\ \Phi_{dn}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & \cdots & G_n & G_{d1}^{(1)} & G_{d2}^{(1)} & \cdots & G_{dn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_n \\ Q_{d1}^{(1)} \\ Q_{d2}^{(1)} \\ \cdots \\ Q_{dn}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

上式中的下标 $0, 1, 2, \cdots, n$ 分别对应于边界 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$,下标 $d1, d2, \cdots, dn$ 分别对应于空气与介质柱的交界面 $\Gamma_{s1}, \Gamma_{s2}, \cdots, \Gamma_{sn}$.

2.3 有限元公式

对于每个介质柱所在的区域 Ω_{sj} 用伽辽金有限元法分析.

将区域 Ω_{sj} 剖分为许多二阶三角形单元,对于其中的任意一个单元 e ,假设其6个节点分别为 $1(x_1, z_1), 2(x_2, z_2), 3(x_3, z_3), 4(x_4, z_4), 5(x_5, z_5), 6(x_6, z_6)$,其中 $1, 2, 3$ 分别为三角形的三个顶点, $4, 5, 6$ 分别为每边中点,场量 ϕ 在6个节点处的值分别为 $\phi_i (i = 1, \cdots, 6)$,则单元 e 中的场量可以表示为

$$\phi = [N]^T [\bar{\phi}]_e \quad (12)$$

其中 $[N]$ 为二阶六节点三角形单元的形状函数, T 表示矩阵的转置.

应用伽辽金有限元法:在(2)式两边同乘以 $[N]$,并对单元 e 所在区域 Ω_e 进行面积分,运用分部积分法,再对区域 Ω_{sj} 中的所有子单元求和,得

$$[A] [\bar{\phi}] - \sum_e \int_{\Omega_e} [N] \frac{\partial \phi}{\partial n} |_{\Gamma_{sj}} d\Gamma = [0] \quad (13)$$

式中, $[A] = \sum \iint \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]}{\partial z} \frac{\partial [N]}{\partial z} - k_0^2 \epsilon_{ij} [N] [N]^T \right\} dx dz$, 这里矩阵 $[\bar{\phi}]$ 是由区域 Ω_{sj}

中所有节点处的 ϕ 值构成的, $\sum$ 和 $\sum$ 分别表示对所有单元求和以及仅与边界 Γ_j 有关的单元求和.

方程(13)可以简化为下列形式

$$[A_{dj}^{(2)}][\Phi_{dj}^{(2)}] = [B_{dj}^{(2)}][Q_{dj}^{(2)}] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

其中, $[A_{dj}^{(2)}]$ 和 $[B_{dj}^{(2)}]$ 矩阵的计算方法参见文献[8], $[\Phi_{dj}^{(2)}]$ 表示边界 Γ_j 上所有节点处的 ϕ 值构成的矩阵, $[Q_{dj}^{(2)}]$ 表示边界 Γ_j 上节点处的 ϕ 外法向导数构成的矩阵.

2.4 分析方法

假设单位场量以主模 TE_{10} 从波导第 j 个端口入射, 则在边界 Γ_i 上的场量 ϕ 为^[8]

$$\phi(z_i = 0, x_i) = 2\delta_{ji} f_{11}(x_i) - \sum_m \frac{1}{j\beta_{im}} \int_0^{\infty} f_{im}(x_{0i}) f_{im}(x_i) q(z_i = 0, x_{0i}) dx_{0i} \quad (15)$$

其中, $f_{im}(x_i) = \sqrt{\frac{2}{a_i}} \sin(\frac{m\pi}{a_i} x_i)$, $m = 1, 2, 3, \dots$; $\beta_{im} = \sqrt{k_0^2 - (\frac{m\pi}{a_i})^2}$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

用边界元法, 可以将方程(15)式离散化为下列形式:

$$[\bar{\Phi}]_{\Gamma_i} = 2\delta_{ji} [f_{11}] - [z]_i [\bar{Q}]_{\Gamma_i} \quad (16)$$

其中, $[z]_i = \sum_m \frac{1}{j\beta_{im}} [f_{im}] \sum \int_0^{\infty} f_{im}(x_{0i}) \cdot [N(z_i = 0, x_{0i})] dx_{0i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

2.5 有限元-边界元耦合公式

利用边界条件

$$[\bar{\Phi}]|_{\Gamma} = 0 \quad (17)$$

$$[\Phi_{dj}^{(1)}] = [\Phi_{dj}^{(2)}], \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

$$[Q_{dj}^{(1)}] = -[Q_{dj}^{(2)}], \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

综合方程(11)、(14)、(16)、(17)、(18)、(19)可以得到下面的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_n & H_{d1}^{(1)} & H_{d2}^{(1)} & \cdots & H_{dn}^{(1)} & -G_0 & -G_1 & -G_2 & \cdots & -G_n & -G_{d1}^{(1)} & -G_{d2}^{(1)} & \cdots & -G_{dn}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{d1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_{d1}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{d2}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B_{d2}^{(2)} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{dn}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{dn}^{(2)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [z]_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & [z]_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \cdots \\ \Phi_n \\ \Phi_{d1}^{(1)} \\ \cdots \\ \Phi_{dn}^{(1)} \\ Q_0 \\ Q_1 \\ \cdots \\ Q_n \\ Q_{d1}^{(1)} \\ \cdots \\ Q_{dn}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 2\delta_j[f_{11}] \\ \cdots \\ 2\delta_j[f_{1n}] \end{bmatrix} \quad (20)$$

上面方程中 $[1]$ 为单位矩阵, $[0]$ 为零矩阵.

解式(20)可以求得波导结每个端口的 ϕ, q 值,从而可以求得 TE_{10} 模的散射系数^[8]

$$S_{ij} = \int \phi(z_j = 0, x_j) f_{j1}(x_j) dx_j - 1 \quad (21)$$

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{\beta_{i1}}{\beta_{j1}}} \int \phi(z_i = 0, x_i) f_{i1}(x_i) dx_i, \quad (i \neq j) \quad (22)$$

3 计算实例

为了验证本文理论研究的正确性,我们编制了一个计算矩形波导结中加载多介质柱散射参数的程序,并对矩形波导中间放置两个圆形截面介质柱情况(如图3所示)进行了研究,图4给出了反射系数随频率变化的曲线,可见本文结果与文[16]值一致(f_c 为波导主模截止频率).

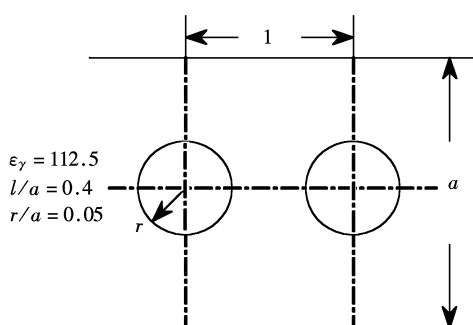


图3 矩形波导中放置两个圆形介质柱

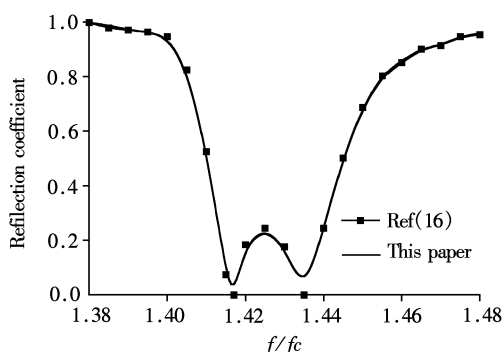


图4 散射参数随频率变化曲线

4 结束语

本文给出了用有限元-边界元耦合法分析矩形波导中加载多介质柱散射特性的一般方法,并给出了一个典型算例.分析和计算表明,由于多连域问题边界元法的引入,使得矩形波导结中加入任意多个介质柱的问题可以容易解决.另外,由于有限元-边界元耦合法保留了有限元、边界元法的优点,同时又克服了各自的缺点,使得该方法不仅可以解决不均匀区域问题,而且计算时对计算机内存的要求比单纯的有限元法大大降低,因而它是一种有效的数值计算方法.

参考文献:

- [1] Schwinger J, Saxon D S. Discontinuities in waveguides [M]. New York: Gordon and Breach, 1968.
- [2] Marcuvitz N. Waveguide handbook [M]. New York: McGraw Hill, 1951.
- [3] Nielsen E D. Scattering by a cylindrical post of complex permittivity in a waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1969(17): 148 ~ 153.
- [4] Sahalos J N, Vafiadis E. On the narrow band microwave filter design using a dielectric rod [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1985(33): 1165 ~ 1171.
- [5] Leviatan Y, Li P G, Adams A T, Perini J. Single-post inductive obstacle in rectangular waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1983(31): 806 ~ 811.
- [6] Abdalnour J, Marchildon L. Scattering by a dielectric obstacle in a rectangular waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1993(41): 1988 ~ 1994.
- [7] Koshiba M, Suzuki M. Finite-element analysis of H-plane waveguide junction with arbitrarily shaped ferrite post [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1986(34): 103 ~ 109.
- [8] Ise K, Koshiba M. Numerical analysis of H-plane waveguide junction by combination of finite and boundary elements [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 1988(36): 1343 ~ 1351.
- [9] Wu K L, Delisle G Y, Fang D G. Waveguide discontinuity analysis with a coupled finite boundary element method [J]. IEEE

- Trans Microwave Theory Tech , 1989(37) :993 ~ 998.
- [10] Siakavara K, Sahalos J N. The discontinuity problem of a rectangular dielectric post in a rectangular waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1991(39) :1617 ~ 1622.
- [11] Hsu G, Auda A. Multiple dielectric posts in a rectangular waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1986(34) :883 ~ 891.
- [12] Abdalnour J , Marchildon L. Boundary element and analytic expansions applied to Hplane waveguide junctions [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech , 1994(42) :1038 ~ 1045.
- [13] Hirayama K, Koshiba M. Analysis of discontinuities in an open dielectric slab waveguide by combination of finite and boundary elements [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1989(37) :761 ~ 768.
- [14] Hirayama K, Koshiba M. Analysis of discontinuities in an asymmetric dielectric slab waveguide by combination of finite and boundary elements [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1992(40) :686 ~ 691.
- [15] Kagami S, Fukai T. Application of boundary element method to electromagnetic field problems [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1984(32) :455 ~ 461.
- [16] Valero A, Ferrando M. Full-wave equivalent network representation for multiple arbitrarily shaped posts in Hplane waveguide [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech ,1999(47) :1997 ~ 2002.

Analysis on Scattering of E-plane Uniform Multiple Dielectric Posts in Rectangular Waveguide

ZHOU Ping

(Department of Physics , Huaiyin teachers college , huaiian 223001 , China)

Abstract: In this paper , the coupled finite-boundary element method is used for the analysis of scattering of E-plane uniform multiple dielectric posts in a rectangular waveguide. The finite-element method and boundary-element method of multiple connect domain are applied to the regions of dielectric posts and without dielectric posts , respectively. To show the validity and usefulness of the method , a computer program is developed and a case is computed. The results agree well with the reference data.

Key words: finite-element method ; boundary-element method ; junction with rectangular waveguide ; dielectric posts ; scattering coefficient

[责任编辑:李晓薇]